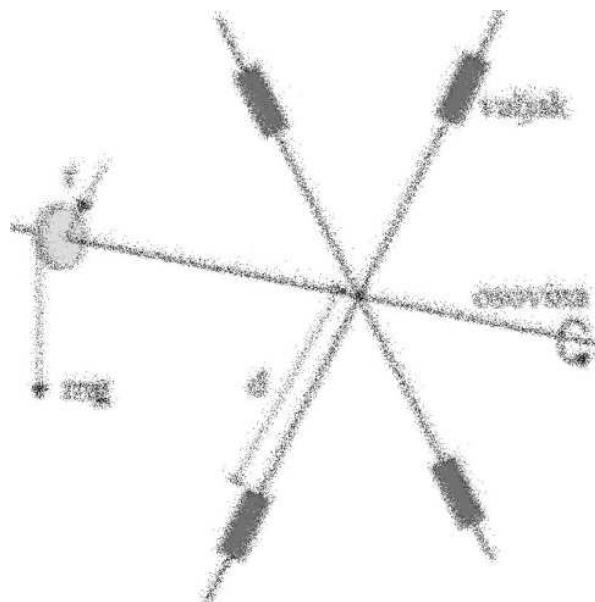


Sveučilite u Splitu
Fakultet prirodoslovno-matematičkih znanosti i odgojnih područja
Zavod za fiziku

Ante Bilušić:

Praktikum iz Opće fizike I



Split, 2006.

Sadržaj

1 Mjerenje duljine i mase	6
2 Određovanje gustoće tekućina	11
3 Zakon očuvanje mehaničke energije	17
4 Moment tromosti	21
5 Matematičko njihalo	26
6 Fizikalno njihalo	30
7 Modul elastičnosti	34
8 Torziono njihalo	39
9 Površinska napetost tekućine	45
A Jednadžba harmoničkog oscilatora	49
B Numeričko deriviranje	51

Popis slika

1.1	Pomična mjerka s dijelovima.	6
1.2	Nonius.	7
1.3	Mikrometarski vijak.	8
1.4	Princip rada vase.	9
1.5	Vaga.	10
2.1	Struktura leda.	12
2.2	Mohr-Westphalova vaga.	13
2.3	Mohr-Westphalova vaga - primjer.	14
2.4	Gustoće tekućine: eksperimentalni uređaj	16
3.1	Skica odmatanja niti oko osovine Maxwellovog diska.	18
3.2	Maxwellov disk.	20
4.1	Moment tromosti: skica eksperimenta.	22
4.2	Eksperimentalni uređaj za određivanje momenta tromosti.	25
5.1	Model matematičkog njihala.	27
5.2	Matematiko njihalo: eksperimentalni uređaj.	29
6.1	Model fizikalnog njihala.	31
6.2	Fizikalno njihalo: eksperimentalni uređaj	33
7.1	Deformacija letve.	35
7.2	Mjerni uređaj za mjerjenje modula elastičnosti.	38
8.1	Torzija cijevi.	40
8.2	Smicanje.	41

8.3	Uređaj za proučavanje torzije.	44
9.1	Napetost opne	45
9.2	Prsten Jollyeve vase	46
9.3	Površinske napetost: eksperimentalni uređaj	48
B.1	Uz izvod formule za numeričku derivaciju.	51

Popis tablica

4.1	Modul elastičnosti: značenje oznaka	23
4.2	Moment tromosti: vrijednosti fizikalnih veličina	24
7.1	Moment tromosti - dimenzije letvi	37
8.1	Dimenzije šipki i modul smicanja Cu i Al	43

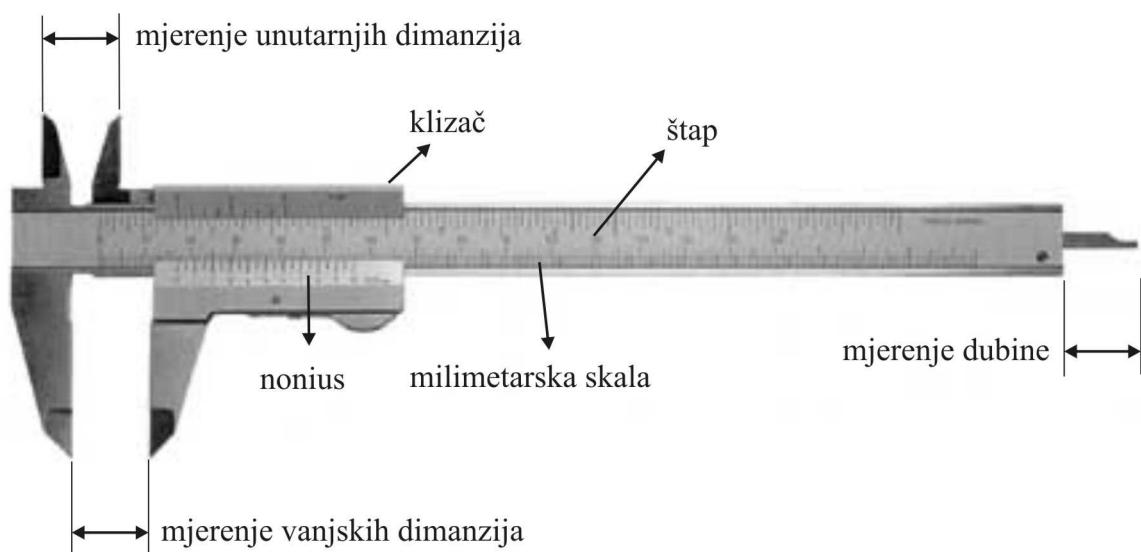
Vježba 1

Mjerenje duljine i mase

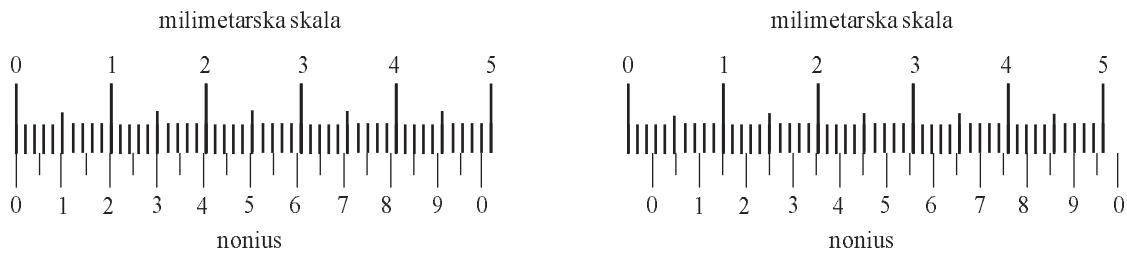
Uvod

Pomična mjerka

Pomičnom mjerkom (slika 1.1) mjerimo dimenzije pravilnih tijela s preciznošću do na dio milimetra. Sastoji se štapa s upisanim skalama (na donjem dijelu je ucrtana milimetarska, a na gornjem skala u inčima), klizača s noniusom, krakova za mjerenje vanjskih dimenzija tijela, šiljaka za mjerenje unutarnjih dimenzija te izbočenja za mjerenje dubine. Radi preciznijeg očitavanja dimenzija, pomična mjerka ima i kočni mehanizam (obično se radi o vijku kojim se klizač pričvrsti za štap).



Slika 1.1: Pomična mjerka s dijelovima.

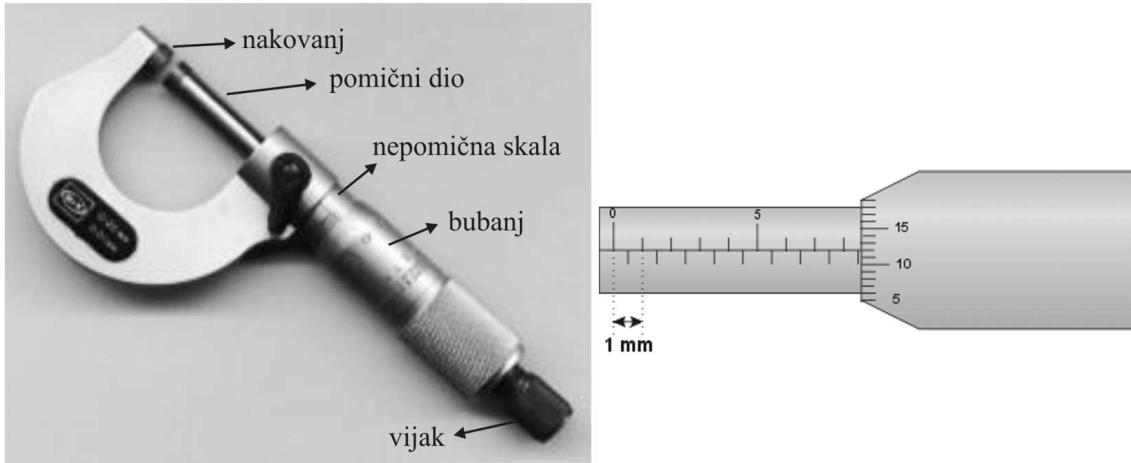


Slika 1.2: Nonius.

Točnost do na dio milimetra postignuta je uporabom noniusa, posebne skale koju je još davne 1542. godine osmislio Portugalac Pedro Nuñez, a do kraja usavršio Francuz Pierre Verneir (zato se nonius ponekad naziva i vernierom). Skala noniusa je podijeljena na deset jednakih dijelova i pomicanjem klizača u krajnje lijevi položaj poklapaju se nulta oznaka na milimetarskoj i skali noniusa (slika 1.2 lijevo). Duljina skale noniusa je za točno 1 milimetar kraća od određene duljine milimetarske skale (na slici 1.2 radi se o duljini od 50 mm). Pomicanjem noniusa desetinku milimetra udesno poklopit će se oznaka 1 noniusa s crticom koja označava 5 mm na milimetarskoj skali. Prema tome, oznaka 1 noniusa je pomaknuta 0,1 mm od oznake za 5 mm na milimetarskoj skali, oznaka 2 noniusa 0,2 mm od oznake za 10 mm na milimetarskoj skali, i tako dalje. Pomakom klizača $n/10$ milimetra udesno, n -ta će se podjela noniusa poklopiti s jednom od podjela na milimetarskoj skali. Ukoliko želimo dobiti mjerku preciznosti bolje od desetinke milimetra, skala noniusa se podjeli na više dijelova: noniusom sa slike 1.2, koji je podijeljen na 20 dijelova, moguće je očitati duljine do $1/20 \text{ mm} = 0,05 \text{ mm}$. Na primjeru sa desnog dijela slike 1.2 ćemo vidjeti kako odrediti duljinu izmjerenu pomičnom mjerkom. Nulta oznaka noniusa se nalazi desno od oznake za 2 puna milimetra. Dakle, izmjerena duljina je 2 cijela milimetra uvećana za dio milimetra određen noniusom, čija se oznaka 7 najbolje poklapa s jednom od oznaka milimetarske skale. Znači, radi se o duljini od 2,7 mm.

Mikrometarski vijak

Mikrometarskim vijak je prikazan na lijevoj strani slike 1.3. Sastoji se od pomičnog dijela i nakovnja između kojih se stavlja predmet čiju dimenziju želimo izmjeriti. Za razliku od pomične mjerke, u kojoj je dimenzija određena pomicanjem klizača,



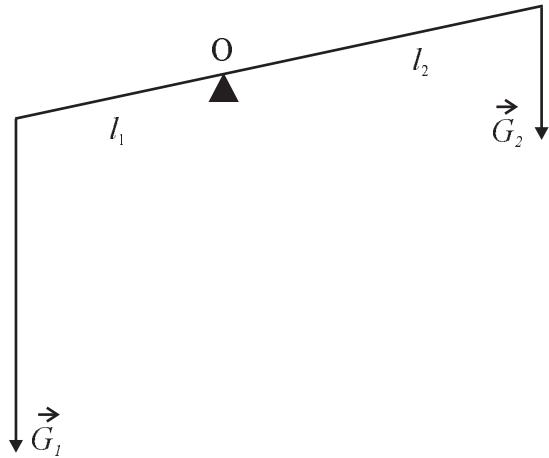
Slika 1.3: Mikrometarski vijak.

pomični dio mikrometarskog vijka se pomiče zakretanjem bubenja. Vijak na kojega je bубанj spojen punim se okretom pomakne za 0,5 milimetra. Na desnom dijelu slike 1.3 se vide uvećani bубанj i nepomična skala. Nepomična skala je linijama podijeljena na dužine duljine 0,5 mm, a na obodu bubenja se nalazi linearna skala s oznakama od 0 do 50. Na primjeru slike 1.3-desno vidjet ćemo kako se očitava dimenzija mikrometarskim vijkom. Gornje linije označavaju pune milimetre. Okretanjem bubenja za puni krug on se pomakne za pola milimetra te je potrebno na nepomičnoj skali označiti i polovice milimetra. Bубанj sa slike se pomaknuo 8 punih milimetara (očitanih linijama iznad vodoravne), zatim za još polovicu milimetra (jer se vidi i linija ispod vodoravne koja označava 8,5 mm) te za još 12/50 punog okreta bubenja (jer se s vodoravnom linijom nepomične skale poklapa dio bubenja s oznakom 12). To daje:

$$8\text{mm} + 0,5\text{mm} + 12/100\text{mm} = 8,62\text{mm}. \quad (1.1)$$

Vaga

Vaga je mjerni uređaj za mjerjenje mase tijela. Njen se princip rada temelji na jednakosti momenta sila oko jedne definirane osi vrtnje. Na slici 1.4 je prikazana poluga s uporištem u točki O, koja je ujedno i os vrtnje. Lijevi krak poluge je duljine l_1 i opterećen je težinom \vec{G}_1 . To, obzirom na os vrtnje O, stvara zakretni moment usmjeren iz ravnine papira koji je jednak



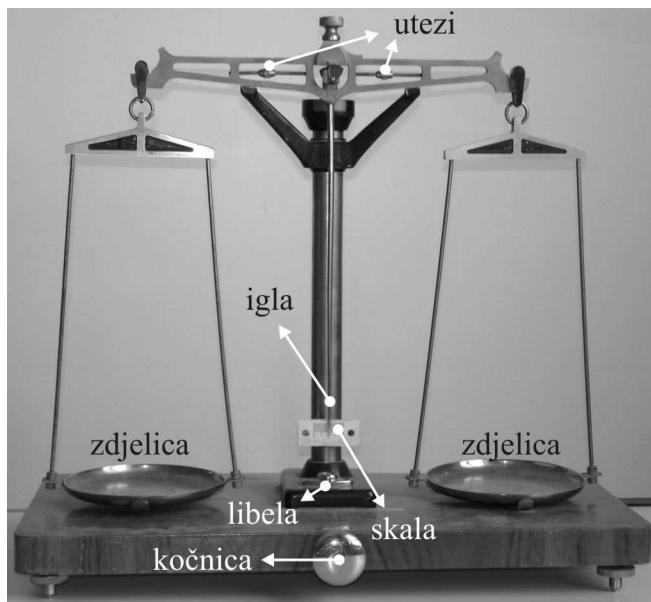
Slika 1.4: Princip rada vase.

$$\vec{M}_1 = \vec{l}_1 \times \vec{G}_1. \quad (1.2)$$

Vektor \vec{l}_1 je usmjeren od osi vrtnje O do hrvatišta sile \vec{G}_1 . Pošto su vektori \vec{l}_1 i \vec{G}_1 međusobno okomiti, iznos njihovog vektorskog umnoška je jednak $|\vec{M}_1| = l_1 G_1$. Moment sile \vec{M}_2 , nastao uslijed djelovanja sile \vec{G}_2 na krak l_2 suprotnog je smjera od smjera vektora momenta sile \vec{M}_1 . U stanju ravnoteže ukupni moment $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ jednak je nuli. U skalarnom obliku ukupni je moment jednak:

$$G_1 l_1 - G_2 l_2 = 0 \quad (1.3)$$

U ravnoteži, kada su krakovi jednake duljine, težine kojima su opterećeni krakovi moraju biti jednake. Pošto je iznos vektora težine jednak umnošku mase i gravitacije, to znači da krakove vase opterećuju jednake mase. Na slici 1.5 je prikazana vaga koja se koristi u Praktikumu. Predmet se stavlja na jednu, a utezi na drugu njenu zdjelicu. Prilikom stavljanja utega ili predmeta na zdjelicu, važno je da vaga bude zakočena, odnosno da kočnica bude u krajnje lijevom položaju. Tek nakon što je vaga opterećena smije se otkočiti polaganim zakretanjem kočnice u krajnje desni položaj. Ako su obje zdjelice opterećene jednakim masama, igla pokazuje sredinu skale te je masa predmeta jednaka ukupnoj masi utega. Vaga je točna ukoliko se nalazi u vodoravnom položaju. Za provjeru vodoravnog položaja vase služi libela, a za promjenu nagiba noge s vijcima na kojima je vaga smještena. Prije uporabe (od-



Slika 1.5: Vaga.

nosno, opterećenja utezima i predmetom) nužno je provjeriti je li vaga uravnotežena. Zato je neopterećenu vagu potrebno otkočiti i eventualno dovesti u položaj ravnoteže zakretanjem utega smještenih pri njenom vrhu.

Zadaci

1. Pomičnom mjerkom odredite volumene triju zadanih valjaka (aluminijskog, bakrenog i čeličnog). Provedite račun pogrešaka.
2. Mikrometarskim vijkom odredite promjere zadanih valjaka. Rezultate usporedite s onima dobivenim pomičnom mjerkom. Provedite račun pogrešaka.
3. Izvažite zadane valjke. Provedite račun pogrešaka.
4. Na temelju izmjerenih volumena i masa odredite gustoće zadanih tijela. Usporedite ih s podacima iz literature. Provedite račun pogrešaka.

Pitanja za razmišljanje

- Komentirajte utjecaj igle na ravnotežu vase.
- Kada poluga sa slike 1.4 može ostati u stanju mirovanja?

Vježba 2

Određovanje gustoće tekućina Mohr-Westphalovom vagom

Teorijski uvod

Gustoća neke tvari je definirana kao omjer njene mase m i volumena V :

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (2.1)$$

Gustoća krutnina je veća od gustoće kapljivina¹ i još je veća od gustoće plinova. U ovoj ćemo vježbi proučavati gustoću dobro nam znane kapljevine, vode. Molekule su u tekućinama povezane silama koje ovise o njihovoj međusobnoj udaljenosti. Na velikim udaljenostima ta sila postaje privlačnom i brzo opada s porastom udaljenosti između molekula.

Temperatura je mjera gibanja molekula u tekućini - niža temperatura znači slabiju pokretljivost molekula. Prema tome, temperatura je i mjera srednje kinetičke energije molekule. Na relativno niskim temperaturama kinetičku energiju molekula nadvladavaju privlačne međumolekularne sile i tekućina se skrutne. Dobro znan primjer skrtnjivanja tekućine je prelazak vode u led. Krutost ledu daju takozvane vodikove veze koje vežu atome vodika i kisika susjednih molekula vode (slika 2.1). Vodikova veza je relativno slaba i povišenjem temperature energija pojedinih molekula vode je dovoljna da izazove njihovo pucanje. Na slici 2.1 se vidi da je raspored molekula vode u ledu takav da ne tvore najgušće moguće pakiranje. Pucanjem vodikovih veza molekule vode se približe što dovodi po povećanja gustoće vode. Svoju

¹Pod pojmom tekućina se misli na svako tijelo koje poprima oblik posude u kojoj se nalazi. Dijele se na kapljivine (na primjer, voda) i plinove (zrak, primjerice).

najvišu vrijednost gustoća vode dosije na temperaturi od 4°C . Ta se pojava naziva anomalijom vode. Zagrijavanjem vode na temperature više od 4°C gustoća vode se smanjuje zbog povećane kinetičke energije molekula.

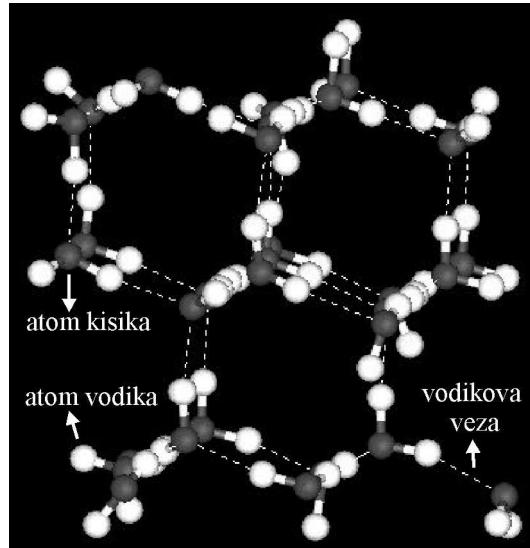
Relativna promjena volumena neke tvari s temperaturom je dana koeficijentom ekspanzije:

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (2.2)$$

Posljednja relacija je dobivena uporabom relacije (2.1).

Mjerni uređaj i postupak mjerena

Gustoću tekućina se određuje Mohr-Westphalovom vagom prikazanom na slici 2.2. Sastoje se od poluge na jednim krajem opterećene roniocem - staklenim tijelom volumena $V = 10 \text{ cm}^3$. Najprije je Mohr-Westphalovu vagu potrebno uravnotežiti u zraku vješanjem utega o njen dulji krak. Na raspolaganju su tri utega mase $m_1 = 10 \text{ g}$ te po jedan masa $m_2 = 1 \text{ g}$, $m_3 = 0,1 \text{ g}$ i $m_4 = 0,01 \text{ g}$. Na slici 2.3 je prikazan primjer rasporeda utega u ravnotežnom stanju vase. Momenti težina utega \vec{M}_1 uravnotežuju moment sile protuutega \vec{M}_2 smještenog na kraćem kraku vase:



Slika 2.1: Struktura leda.

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{0} \quad (2.3)$$

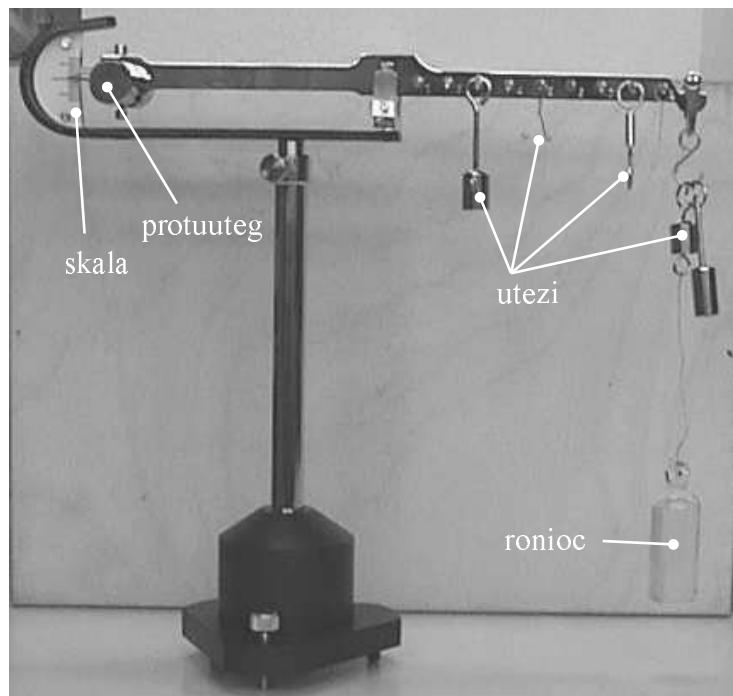
Momenti težina utega su jednaki

$$|\vec{M}_1| = \sum_{i=1}^4 m_i g r_i, \quad (2.4)$$

gdje su r_i krakovi sila težina utega m_i . Desni dio kraka vase (slika 2.3) je objesitima za utege podijeljen na deset jednakih dijelova međusobno udaljenih za d . Zato se r_i može napisati kao $r_i = x_i d$, gdje je x_i oznaka objesišta o kojega je obješen pojedini uteg, te jednadžba (2.4) postaje

$$|\vec{M}_1| = \sum_{i=1}^4 m_i g x_i d. \quad (2.5)$$

Na primjeru prikazanom na slici 2.3 moment utega je jednak



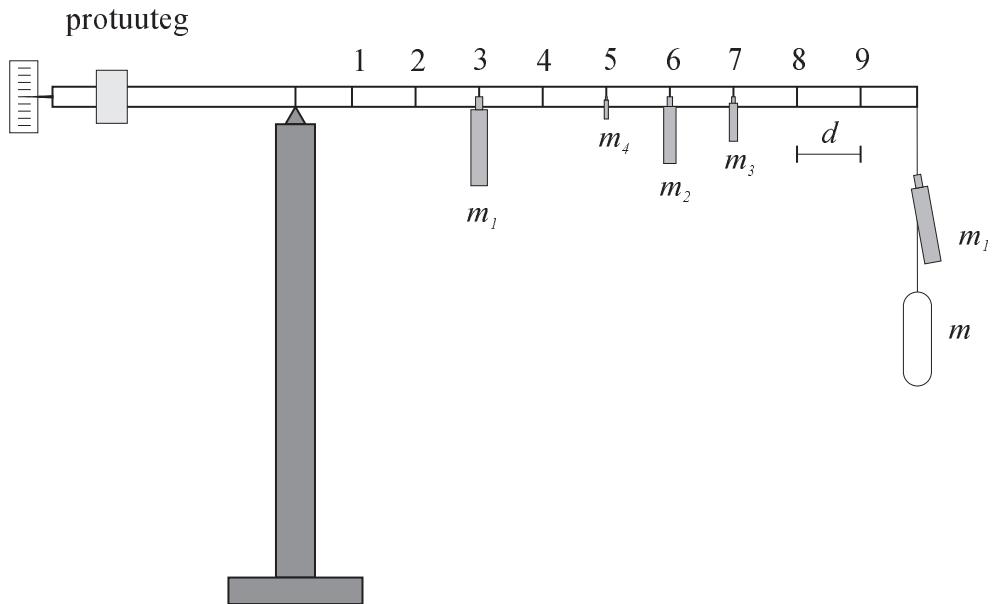
Slika 2.2: Mohr-Westphalova vaga.

$$\begin{aligned}
 |\vec{M}_1| &= (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4) gd \\
 &= (m_1 \cdot 10 + m_1 \cdot 3 + m_2 \cdot 6 + m_3 \cdot 7 + m_4 \cdot 5) gd \\
 &= (10 \cdot 10 + 10 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 0,1 \cdot 7 + 0,01 \cdot 5) gd \\
 &= (13 \cdot 10 + 1 \cdot 6 + 0,1 \cdot 7 + 0,01 \cdot 5) gd \\
 &= 136,75 gd
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Primjetite da se u gornjoj jednadžbi uteg mase m_1 javlja dva puta jer se na slici 2.3 nalze i dva utega mase m_1 . Uranjanjem ronioca u vodu na njega djeluje i sila uzgona \vec{U} koja je usmjerenica u smjeru suprotnom od smjera njegove težine. Iznos sile uzgona je

$$|\vec{U}| = \rho g V, \tag{2.7}$$

gdje je ρ gustoća tekućine u koju je ronioc uronjen. Moment sile uzgona \vec{M}_{uzg} djeluje u smjeru suprotnom od smjera vektora momenta \vec{M}_1 te je za ponovno uravnoveženje vase potrebno prerazmjestiti utege. Uz prerazmještaj utega na kraku vase, trebat ćeće i objesiti još jedan uteg mase $m_1 = 10$ g na objesište ronioca. Pretpostavimo da uz dva utega mase m_1 obješene na objesištu ronioca, imamo i uteg m_1 na hvatištu



Slika 2.3: Mohr-Westphalova vase - primjer.

označenim brojem '3', uteg mase m_2 na objesištu '6', m_3 na '4' i m_4 na '7'. Moment \vec{M}_1 je tada jednak

$$\begin{aligned}
 |\vec{M}'_1| &= (m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4)gd \\
 &= (m_1 \cdot 10 + m_1 \cdot 10 + m_1 \cdot 3 + m_2 \cdot 6 + m_3 \cdot 4 + m_4 \cdot 7)gd \\
 &= (10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 0,1 \cdot 4 + 0,01 \cdot 7)gd \quad (2.8) \\
 &= (23 \cdot 10 + 1 \cdot 6 + 0,1 \cdot 4 + 0,01 \cdot 7)gd \\
 &= 236,47gd
 \end{aligned}$$

Razlika momenata $|\vec{M}_1|$ i $|\vec{M}'_1|$ je jednak momentu sile uzgona na ronioc

$$|\vec{M}_{uzg}| = \rho g V \cdot 10d = |\vec{M}'_1| - |\vec{M}_1|, \quad (2.9)$$

gdje je $10d$ krak sile uzgona. Na konkretnom primjeru gornja jednadžba daje

$$\rho g V \cdot 10d = 99.72gd, \quad (2.10)$$

što, imajući na umu da su mase utega dane u gramima, a $V = 10 \text{ cm}^3$, za gustoću tekućine daje

$$\rho = \frac{99,72}{10 \cdot 10} = 0,9972 \text{ g/cm}^3 \quad (2.11)$$

U ovoj vježbi mjeriti temperaturnu ovisnost gustoće vode. Za kontrolu temperature čete koristiti vodenu kupelj s termostatom, a posudu s vodom u koju čete uroniti ronioc uronite u vodenu kupelj. Temperaturu vode u vodenoj kupelji postavite potenciometrom na termostatu, a pratite je alkoholnim termometrom uronjenim u vodenu kupelj. Kada je temperatura vodene kupelji stabilizirana, pričekajte nekoliko minuta da se stabilizira i temperatura vode u posudi s roniocem. Nakon određivanja gustoće vode, izmjerite temperaturu vode u posudi priloženim termometrom.

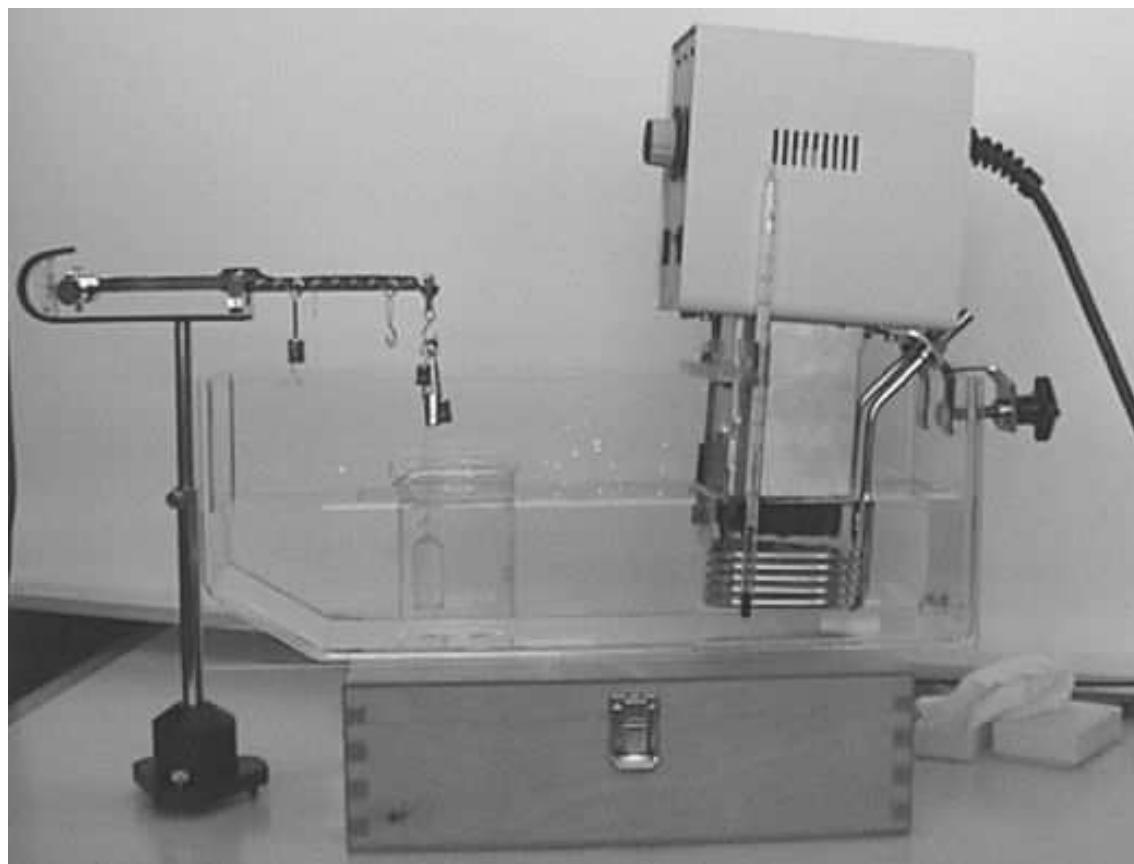
Zadaci

1. Uravnotežite Mohr-Westphalovu vagu kada se ronioc nalazi u zraku i zabilježite raspored utega.

2. Izmjerite i grafički prikažite temperaturnu ovisnost gustoće vode u intervalu od 25°C do 75°C uz korake od 5°C .
3. Odredite koeficijent ekspanzije na temperaturama 30°C i 65°C . Provedite račun pogrešaka. Koristite formulu za numeričku derivaciju iz dodatka B na stranici 51.

Pitanja za razmišljanje

- Koliki je koeficijent ekspanzije vode na 4°C ?



Slika 2.4: Eksperimentalni postav za mjerjenje temperaturne ovisnosti gustoće tekućine.

Vježba 3

Zakon očuvanje mehaničke energije

Teorijski uvod

Zatvoren sustav je onaj u kojemu nema izmjene energije s okolinom. Prema tome, u zatvorenome sustavu energija je očuvana. U ovoj će se vježbi proučavati gibanje Maxwellovog diska - diska relativno velikog momenta tromosti na čiju su osovinu namotane dvije na stalak privezane niti.

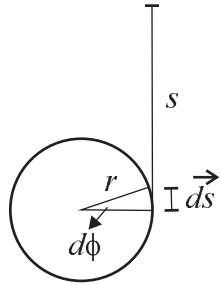
Gibanje diska se može opisati preko zakona očuvanja energije. Ukupna energija je jednaka zbroju potencijalne i kinetičke. Za ishodišnu potencijalu energiju E_{pot} uz-mimo onu koju disk ima u točki u kojoj se nalazi prije početka gibanja. Otpuštanjem se disk počinje gibati. Gibanje se može razložiti na gibanje njegovog centra mase i vrtnje oko osovine diska uslijed odmatanja niti. Pošto je ishodišna potencijalna energija diska ona u koju je imao prije početka gibanja, njegova je ukupna energija jednaka nuli:

$$E_{pot} + E_{kin} + E_{rot} = 0 \quad (3.1)$$

Potencijalna energija diska je jednaka $E_{pot} = -mgs$. Negativan predznak dolazi zbog činjenice da se potencijalna energija diska smanjuje njegovim spuštanjem. Kinetička energija se sastoji od energije gibanja centra mase E_{kin} te vrtnje diska E_{rot} :

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.2)$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I_z\omega^2 \quad (3.3)$$



Slika 3.1: Skica odmatanja niti oko osovine Maxwellovog diska.

U gornjim jednadžbama m je masa, v brzina centra mase, I_z moment tromosti njegove osi simetrije diska, a ω njegova kutna brzina. Odmotavanje konca se može shvatiti kao kotrljanje diska oko osovine na koju je konac namotan te se iz slike 3.1 može vidjeti da vrijedi $ds = rd\phi$. Deriviranjem te jednadžbe po vremenu se dobije veza između kutne brzine ω i brzine centra v mase pri kotrljanju:

$$v = \omega r. \quad (3.4)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (3.2), (3.3) i (3.4) u jednadžbu (3.1) dobije se:

$$-mgs + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_z \frac{v^2}{r^2} = 0. \quad (3.5)$$

Deriviranjem gornje jednadžbe dobije se izraz za ubrzanje diska:

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I_z}{r^2}} \quad (3.6)$$

Pošto je gibanje jednoliko ubrzano i u početnom trenutku $t = 0$ su prevaljeni put s_0 i početna brzina v_0 jednaki nuli, izrazi za put i brzinu se:

$$s = \frac{1}{2} \frac{mg}{m + \frac{I_z}{r^2}} \cdot t^2, \quad (3.7)$$

$$v = \frac{mg}{m + \frac{I_z}{r^2}} \cdot t. \quad (3.8)$$

Mjerni uređaj i postupak mjerenja

Eksperimentalni uređaj je prikazan na slici 3.2. Sastoji se od stalka s centimetarskom podjelom, Maxwellova diska koji je pomoću niti vijcima privezan na stalak.

Važno je da disk bude u vodoravnom položaju i da se nit namata ravnomjerno - neravnomjerno namatanje niti dovodi do nepravilnog gibanja diska. Mjerenje se izvodi tako da se disk namatanjem niti podigne na određenu visinu. Ta se visina označi kliznim pokazivačem smještenim na lijevoj strani stolka. Disk se otpusti i zapornom urom izmjeri vrijeme potrebno da dosegne donji položaj (označen crvenom linijom). Prevaljeni put diska se izmjeri metrom. Masa diska je 525,7 grama, a promjer njegove osovine 8,05 milimetara.

Zadaci

1. Izmjerite vrijeme poniranja diska za desetak različitih visina. Metodom najmanjih kvadrata provjerite kvadratnu ovisnost puta o vremenu (koristite $\log s - \log t$ dijagram). Provedite račun pogrešaka.
2. Nacrtajte ovisnost prevaljenog puta o vremenu u $s - t^2$ dijagramu. Nacrtajte ovisnost brzine o vremenu.
3. Nacrtajte grafove ovisnosti potencijalne, kinetičke i energije vrtnje o vremenu.

Pitanja za razmišljanje

- Izvedite izraz (3.6)!
- Do kojega trenutka Maxwellov disk predstavlja zatvoreni sustav?



Slika 3.2: Maxwellov disk.

Vježba 4

Moment tromosti

Teorijski uvod

Momentom tromosti opisujemo mjeru opiranja tijela kružnom gibanju. Definira se ovako:

$$I = \int r^2 dm. \quad (4.1)$$

gdje je r udaljenost elementa mase dm od osi vrtnje. Na slici 4.1 je skiciran eksperimentalni uređaj koji se koristi u ovoj vježbi. Sastoji se od četiri šipke međusobno postavljene pod pravim kutom i spojene na osovinu. Na svakoj šipci se nalazi po jedan valjak. Na osovinu je spojena i kolotura na koju je obješena masa m . Pod utjecajem sile teže masa vrti koloturu, čija se vrtnja prenosi na osovinu, šipke i valjke.

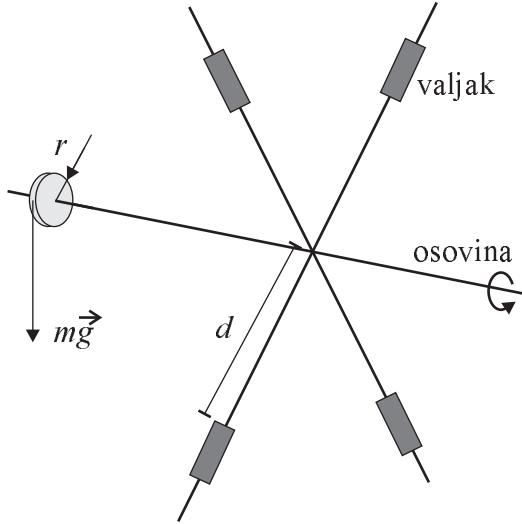
Vrtnja sustava osovina-šipke-valjci-kolotura se može opisati jednadžbom gibanja

$$\vec{r} \times \vec{F} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (4.2)$$

u kojoj je \vec{r} vektor polumjera koloture, \vec{F} sila po čijim se utjecajem sustav vrti, I moment tromosti sustava, a $\vec{\omega}$ kutna brzina sustava. Pošto su vektori \vec{r} i \vec{F} međusobno okomiti, skalarni oblik jednadžbe (4.2) je:

$$F = \frac{I}{r} \frac{d\omega}{dt}. \quad (4.3)$$

Pomoću gornje jednadžbe se može odrediti moment tromosti sustava I . Prije toga, silu F i kutno ubrzanje $d\omega/dt$ moramo prikazati preko mjerljivih fizikalnih veličina.



Slika 4.1: Moment tromosti: skica eksperimenta.

Pod pretpostavkom da nema klizanja koloture prema osovini, kutno se ubrzanje može povezati s ubrzanjem a tijela mase m deriviranjem jednadžbe (3.4) po vremenu:

$$a = I \frac{d\omega}{dt}. \quad (4.4)$$

Ubrzanje a se može izmjeriti mjerenjem vremena potrebnog da tijelo mase m prevali put iznosa l :

$$l = \frac{2l}{t^2}. \quad (4.5)$$

Sila se \vec{F} , pod utjecajem koje se sustav vrti, ne može izravno izmjeriti. Težina tijela $m\vec{g}$ mora savladati sile trenja koloture i sustava šipke-valjci, ubrzati ih te ubrzati tijelo mase m :

$$mg = ma + F_{tr,k} + F_{u,k} + F_{tr,\check{s}} + F. \quad (4.6)$$

U gornjoj jednadžbi značenje pojedinih oznaka je dano u tablici 4.1.1.

Tangencijalno ubrzanje koloture je jednako a . Radi jednostavnosti, sile trenja između koloture i osovine te silu koja ubrzava koloturu možemo zamijeniti jednom silom μa :

$$F_{tr,k} + F_{u,k} = \mu a. \quad (4.7)$$

oznaka	značenje
$ma:$	sila koja ubrzava masu m
$F_{tr,k}:$	sila trenja između koloture i osovine
$F_{u,k}:$	sila koja ubrzava koloturu i osovinu
$F_{tr,\check{s}}:$	sila trenja između sustava šipke-valjci i osovine
$F:$	sila koja ubrzava sustav šipke-valjci

Tablica 4.1: Značenje pojedinih oznaka pri izvodu jednadžbe gibanja uređaja za proučavanje momenta tromosti.

gdje je s μ označena masa koloture i osovine ($\mu = 303,7$ grama). Pomoću jednadžbi (4.6) i (4.7) sila F postaje:

$$F = mg - (m + \mu)a - F_{tr,\check{s}} \quad (4.8)$$

Jednadžbe (4.4)-(4.8) daju sljedeći izraz:

$$F_1 = I \frac{2l}{r^2 t^2} + F_{tr,\check{s}}, \quad (4.9)$$

gdje je s F_1 označena razlika:

$$F_1 = mg - (m + \mu)a. \quad (4.10)$$

Mjerni uređaj i postupak mjerjenja

Na slici 4.2 je prikazan eksperimentalni uređaj. Prije početka mjerjenja namjestite četiri valjka na jednakim odaljenostima od osovine. Za to se poslužite odvijačem i vijcima kojima su utezi pričvršćeni za šipke. Opteretite postolje utezima i namotajte nit do vrha na koloturu pazeći da se nit namotava jednolikom. Otpustite postolje s utezima i izmjerite vrijeme potrebno da dođe do donje točke svoje putanje (pri čemu prevali put l). Ponovite mjerjenja za desetak masa utega postavljenih na postolje.

Pomoću jednadžbe (4.9) metodom najmanjih kvadrata odredite moment tromosti sustava šipke-valjci. Pri tome će varijable x i y biti jednake:

$$x = \frac{2l}{r^2 t^2}, \quad (4.11)$$

$$y = F_1. \quad (4.12)$$

veličina	vrijednost
masa postolja za utege:	69,5 g
masa debljih utega:	205 g
masa tanjih utega:	55 g
masa šipke:	40 g
masa valjaka:	85,7 g
masa osovine i koloture (μ):	303,7 g
promjer koloture ($2r$):	25,8 mm
duljina niti (l):	57,5 cm

Tablica 4.2: Vrijednosti fizikalnih veličina potrebne za račun.

Pri računu koristite vrijednosti dane u tablici 4.2.

Zadaci

- Odredite moment tromosti sustava šipke-valjci postupkom opisanim u prethodnom poglavlju. Provedite račun pogrešaka.

Pitanja za razmišljanje

- Pretpostavite da se masa m ne mijenja i da približite valjke bliže osovini. Promijeni li se tada ubrzanje a ?
- Izračunajte moment tromosti sustava šipke-valjci!



Slika 4.2: Eksperimentalni uređaj za određivanje momenta tromosti.

Vježba 5

Matematičko njihalo

Teorijski uvod

Matematičko njihalo se sastoji od točkaste mase m obješene o nit bez mase. U stvarnosti matematičko njihalo ne postoji jer ne postoji točkasta masa. U realnom eksperimentu ulogu točkaste mase igra kuglica mase m , a uz uvjet da je dimenzija kuglice (puno) manja od duljine niti l njihalo se može aproksimirati matematičkim. Matematičko njihalo (slika 5.1) je zatvoren sustav i u njemu je energija očuvana:

$$E_{kin} + E_{pot} = E_{uk} = \text{konst.} \quad (5.1)$$

Kinetička energija je:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2. \quad (5.2)$$

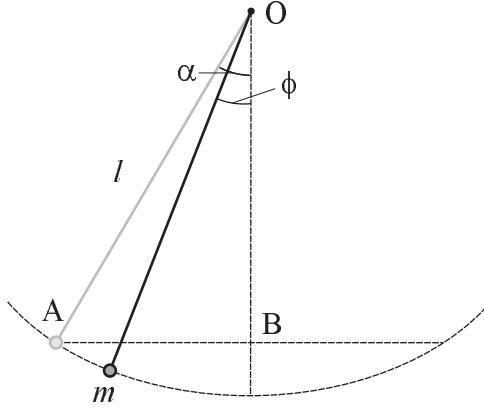
U transformaciji gornjeg izraza je korištena jednadžba (3.4). Uzme li se najniži položaj matematičkog njihala za ishodišni, potencijalna energije je jednaka:

$$E_{pot} = mgl(1 - \cos \phi), \quad (5.3)$$

gdje je ϕ je trenutni kut otklona njihala. Kada je njihalo otklonjeno za najveći kut α , ukupna energije je jednaka potencijalnoj u toj točki:

$$E_{uk} = mgl(1 - \cos \alpha). \quad (5.4)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (5.2)-(5.4) u (5.1), dobije se sljedeći izraz:



Slika 5.1: Model matematičkog njihala.

$$d\phi = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \phi - \cos \alpha)} \cdot dt. \quad (5.5)$$

Uz početni uvjet da njihalo u trenutku $t = 0$ miruje u položaju s kutom otklona $\phi = -\alpha$, može se odrediti poluperiod titranja:

$$\frac{T}{2} = \int_0^{T/2} dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \phi - \cos \alpha)}}. \quad (5.6)$$

Za male kute može se koristiti razvoj funkcije kosinus u red:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \quad (5.7)$$

te izraz (5.6) postaje

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\phi}{\sqrt{\alpha^2 - \phi^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.8)$$

Ako kut otklona nije zanemariv, razvoj (5.7) se ne može primijeniti te se integral (5.6) mora riješiti egzaktno. Dobije se izraz:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(k), \quad (5.9)$$

u kojemu je $K(k)$ potpuni eliptični integral prve vrste definiran ovako

$$K(k) = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi}. \quad (5.10)$$

Razvijen u red, eliptični integral prve vrste daje

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \dots \right) \quad (5.11)$$

te je period titranja za velike kutove otklona jednak:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \dots \right). \quad (5.12)$$

Mjerni uređaj i postupak mjerena

Eksperimentalni uređaj za proučavanje matematičkog njihala je prikazan na slici 14. Na dugoj niti je obješena kuglica promjera 27 milimetara. Duljina njihala može se mijenjati stegom. Kod mjerena duljine njihala, duljini niti dodajte i polumjer kugle. Da bi se smanjila sistematska pogreška, period njihala izmjerite mjerjenjem vremena potrebnog za pet do deset njihaja. Za prvi dio vježbe, u kojemu se provjerava valjanost jednadžbe (5.8), kuglicu otklonite za mali kut od nekoliko stupnjeva. U drugom dijelu vježbe, u kojemu se provjerava izraz (5.12), kuglicu otklonite za veliki kut i mjerjenjem duljine dužine AB sa slike 5.1 odredite kut otklona α .

Zadaci

- Izmjerite periode titranja matematičkog njihala za desetak duljina niti l uz mali kut otklona α . Dobivene rezultate prikažite u $\log T - \log l$ dijagramu i metodom najmanjih kvadrata provjerite korijensku ovisnost perioda o duljini njihala! Provedite račun pogrešaka.
- Prikažite prethodne rezultate u $T^2 - l$ dijagramu. Metodom najmanjih kvadrata odredite konstantu gravitacije g . Provedite račun pogrešaka.
- Izmjerite periode titranja matematičkog njihala za velike kutove otklona α . Metodom najmanjih kvadrata provjerite valjanost izraza (5.12). Provedite račun pogrešaka.

Pitanje za razmišljanje

- Izvedite izraz (5.8) pomoću Newtonovih jednadžbi!



Slika 5.2: Matematiko njihalo: eksperimentalni uređaj.

Vježba 6

Fizikalno njihalo

Teorijski uvod

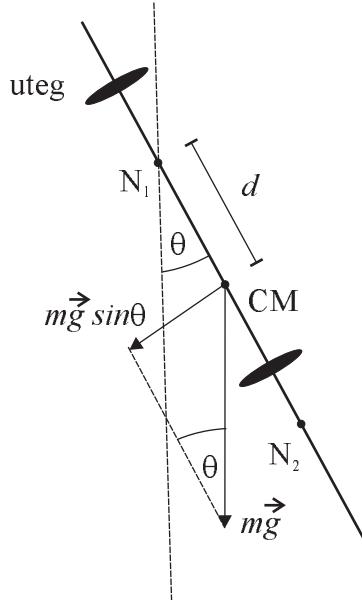
Fizikalno njihalo, za razliku od matematičkog, nema svu masu skoncentriranu u jednoj točki. Zato se gibanje fizikalnog njihala ne može opisati Newtonovom jednadžbom $F = ma$ (gdje je m masa njihala) jer svaka točka (odnosno svaka elementarna masa) nema jednakо ubrzanje. No, svaka točka fizikalnog njihala zato ima jednakо kutno ubrzanje $\vec{\alpha}$ te se jednadžbe gibanja mogu postaviti preko momenta sile:

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}, \quad (6.1)$$

gdje je \vec{M} moment sile, a I moment tromost fizikalnog njihala. Moment je sile jednak vektorskom umnošku kraka sile i sile te je za opis momenta sile koje djeluje na fizikalno njihalo dobro uvesti pojam centra mase (cm) točke u kojoj kao da je skoncentrirana sva masa tijela. Na slici 6.1 je prikazana skica fizikalnog njihala koje se koristi u ovoj vježbi. Sila koja uzrokuje gibanje njihala oko točke N_1 je $m\vec{g} \cdot \sin\alpha$, a njen krak je jednak d , te se jednadžba (6.1) može u skalarnom obliku napisati:

$$mgd \sin \theta = -I \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (6.2)$$

Negativan je predznak u gornjoj jednadžbi posljedica suprotnih smjerova vektora \vec{M} i $\vec{\alpha}$. Ako je kut oscilacija mali, sinusna se funkcija može razviti u red: $\sin \theta \approx \theta$. Jednadžba (6.2) tada postaje jednadžba harmoničnog oscilatora čije je rješenje periodična funkcija perioda



Slika 6.1: Model fizikalnog njihala.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}. \quad (6.3)$$

Uz zamjenu

$$l_0 = \frac{I}{md}, \quad (6.4)$$

izraz (6.3) se poklapa s izrazom za period matematičkog njihala (5.8); veličina l_0 se naziva reduciranom duljinom njihala. Pomoću reducirane duljine njihala se može definirati nova os vrtnje (na slici 6.1 je označena s N_2) koje je od N_1 udaljena za reduciranu duljinu njihala l_0 . Tada je udaljenost centra mase od nove osi jednaka

$$d' = l_0 - d = \frac{I}{md} - d = \frac{I - md^2}{md}, \quad (6.5)$$

Period titranja oko nove osi je, po analogiji s jednadžbom (6.3), jednak

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{mgd'}} \quad (6.6)$$

gdje je I' moment tromosti njihala oko osi N_2 . Momenti tromosti I i I' su, po Steinerovom poučku, jednak zbroju momenta tromosti oko centra mase I_{cm} i umnošku

mase i kvadrata udaljenosti osi vrtnje od centra mase:

$$I = I_{cm} + md^2, \quad (6.7)$$

$$I' = I_{cm} + md'^2. \quad (6.8)$$

Kombiniranjem jednadžbi (6.3)-(6.8) se dobije da su periodi T i T' jednaki.

Mjerni uređaj i postupak mjerena

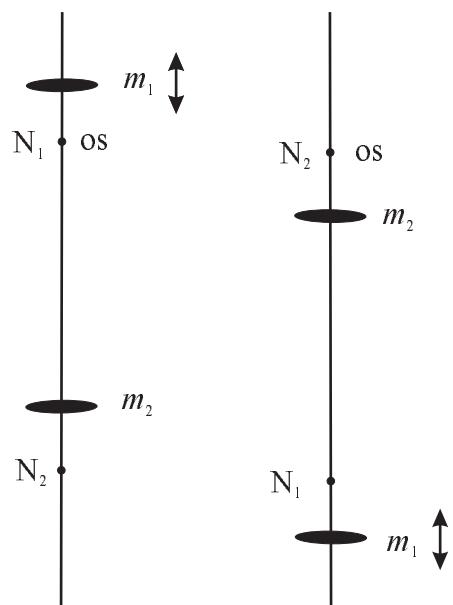
U praksi je teško točno odrediti reduciranoj duljinu fizikalnog njihala. Zato je u ovoj vježbi postupak obrnut: reducirana duljina njihala l_0 je unaprijed zadana i jednaka je udaljenosti između dva noža N_1 i N_2 (50 cm), a utezi m_1 i m_2 se moraju tako rasporediti da period titranja bude jednak za titranje njihala oko obaju noževa. Takav je položaj utega, osim možda slučajno, teško odrediti. Zato se period titraja mora odrediti grafički. Najprije se njihalo objesi o nož N_1 , uteg m_2 se postavi u neki stalan položaj, a bilježe se periodi titraja za različite položaje utega m_1 (slika 6.2). Tako se dobije krivulja ovisnosti perioda o položaju utega m_1 . Zatim se njihalo objesi na nož N_2 , ponovno bilježe periodi titranja za različite položaje utega m_1 te se dobije nova krivulja ovisnosti perioda o položaju utega m_1 . Period T je definiran presjekom tih dviju krivulja.

Zadatak

- Pomoću jednadžbi (6.3) i (6.4) i postupkom opisanim u prethodnom poglavljju, odredite gravitacijsku konstantu g za dva različita fiksna položaja utega m_2 . Da bi se smanjila sistematska pogreška, period njihala izmjerite mjerenjem vremena potrebnog za pet do deset njihaja.

Pitanja za razmišljanje

- Dokažite da je $T = T'$!
- U kojem ste uređaju susreli fizikalno njihalo?



Slika 6.2: Fizikalno njihalo (lijevo) i princip mjerjenja (desno).

Vježba 7

Modul elastičnosti

Teorijski uvod

Elastična deformacija tijela (njegovo produljenje ili skraćenje) je za slabu silu proporcionalna sili. To je poznati Hookeov zakon:

$$\epsilon = E\sigma, \quad (7.1)$$

odnosno

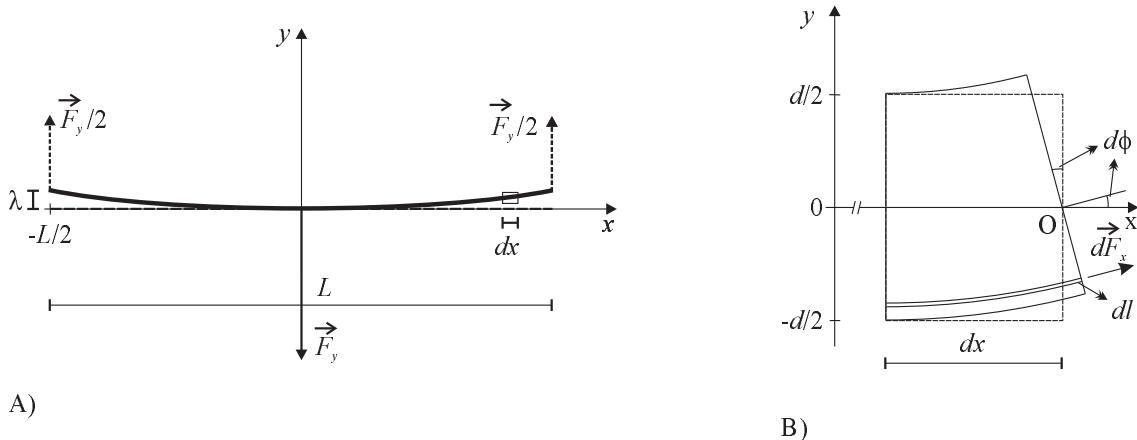
$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}. \quad (7.2)$$

U gornjoj je jednadžbi ϵ zamijenjen s F/S i predstavlja silu naprezanja po jedinici poprečnog presjeka, relativno istezanje σ s $\Delta l/l$, a E je Youngov modul i osobina je materijala. Produljenje materijala u jednom izaziva njegovo stezanje u okomitim smjerovima. Omjer tih deformacija je definiran Poissonovim omjerom μ :

$$\mu = \frac{\Delta w}{w} : \frac{\Delta l}{l}, \quad (7.3)$$

gdje je w dimenzija okomita na dimenziju l .

U ovoj će se vježbi računati modul elastičnosti savijanjem letve debljine d i širine a . Letva je poduprta u dvije točke međusobno udaljene za L i na sredini opterećena silom \vec{F}_y . Sila savija letvu, a sa slike 7.1 A) se može vidjeti da je ta situacija analogna onoj u kojemu su krajevi letve opterećeni silama $\vec{F}_y/2$ usmjerenim u smjeru suprotnom od smjera sile \vec{F}_y . Krajevi letve su podignuti za iznos λ u odnosu na nedeformiranu letvu. Desni dio slike pokazuje uvećan djelić letve: pravokutnik predstavlja nedeformiranu letvu. Deformacija letve deformira djelić na način da je



Slika 7.1: Deformacija letve.

jedan njegov dio produljen, a drugi skraćen. Deformirani djelić letve jest kružni vijenac polumjera zakrivljenosti R i kuta $d\phi$. Pošto je R mnogo veći od debljine letve d , može se napisati da je $dx = R d\phi$.

Na slici 7.1 B) je istaknut sloj debljine dy , od ishodišta udaljen za y (koji je u ovome slučaju negativan). Sila koje je dovela do produljenja toga sloja poprečnog presjeka dS za iznos dl je $d\vec{F}_x$. Hookeov zakon (7.2) za tu deformaciju daje:

$$\frac{dF_x}{dS} = E \frac{dl}{dx}. \quad (7.4)$$

Produljenje dl se može povezati s kutom $d\phi$ jednadžbom $dl = -y d\phi$ (negativan predznak je posljedica negativne vrijednosti y i pozitivne vrijednosti dl) što, uvršteno u jednadžbu (7.4), daje

$$\frac{dF_x}{dS} = -E y \frac{d\phi}{dx} = -E \frac{y}{R}. \quad (7.5)$$

Kako izračunati silu dF_x ? Ona je, sasvim sigurno, posljedica djelovanja sile \vec{F}_y na letvu. Sa slike 7.1 B) se vidi da sila $\vec{F}_y/2$, usmjerena u pozitivnom dijelu y-osi, zakreće djelić štapa. Drugim riječima, njenim djelovanjem nastaje moment sile \vec{M} usmjerjen u smjeru osi z . Krak sile na djelić letve dx koordinate x je $(L/2 - x)$. Moment sile \vec{F}_y je, prema tome, jednak

$$M = \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{F_y}{2}. \quad (7.6)$$

Sa slike 7.1 B) se vidi da je djelić momenta sile $d\vec{F}_x$ koji dovodi do zakretanja djelića letve oko osi O jednak

$$dM = -y dF_x. \quad (7.7)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (7.5) i izraza za element površine $dS = ady$ u jednadžbu (7.7), dobije se

$$dM = \frac{Ea}{R} y^2 dy. \quad (7.8)$$

Ukupan moment sile $d\vec{F}_x$ je jednak integralu gornjeg izraza po y u granicama od $-d/2$ do $d/2$:

$$M = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{Ea}{R} y^2 dy = \frac{Ead^3}{12R}. \quad (7.9)$$

Jednadžbe (7.6) i (7.9) opisuju istu pojavu: savijanje djelića letve koordinate x i debljine dx . Vanjska sila \vec{F}_y izaziva nastanak sile $d\vec{F}_x$ što dovodi do deformacije letve. Dakle, ista je pojava opisana na dva načina te se između izraza (7.6) i (7.9) može staviti znak jednakost koji daje sljedeći izraz za polumjer zakrivljenosti deformacije letve:

$$\frac{1}{R} = \frac{6F_y}{Ead^3} \left(\frac{L}{2} - x \right). \quad (7.10)$$

Mjerljiva veličina je ukupno ulegnuće sredine opterećene letve λ . Savijanje djelića letve dx za kut $d\phi$ (slika 7.1 B)) izaziva ulegnuće ruba letve za $d\lambda$:

$$d\lambda = \left(\frac{L}{2} - x \right) d\phi, \quad (7.11)$$

gdje je $(L/2 - x)$ udaljenost djelića letve od njenog ruba. Uzevši u obzir da je $dx = Rd\phi$ te jednadžbu (7.10), ukupno ulegnuće λ je

$$\lambda = \int d\lambda = \int_0^{L/2} \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{dx}{R} = \frac{1}{4E} \frac{L^3}{ad^3} F_y. \quad (7.12)$$

Mjerni uređaj i postupak mjerena

Mjerni uređaj je prikazan na slici 7.2. Letva, čiji se Youngov modul E želi odrediti, je poduprta u dva uporišta i na sredini ima probušenu rupicu o koju se vješaju utezi koji je opterećuju. Na sredinu letve je naslonjen mikrometarski vijak - uređaj kojim se mjeri pomak s preciznosti od stotinke milimetra. Mala kazaljka mikrometarskog vijka pokazuje cijele, a velika stotinke milimetra. Pomak sredine letve λ se mjeri za različite težine utega. Modul elastičnosti E se odredi metodom najmanjih kvadrata iz jednadžbe (7.12).

Zadatak

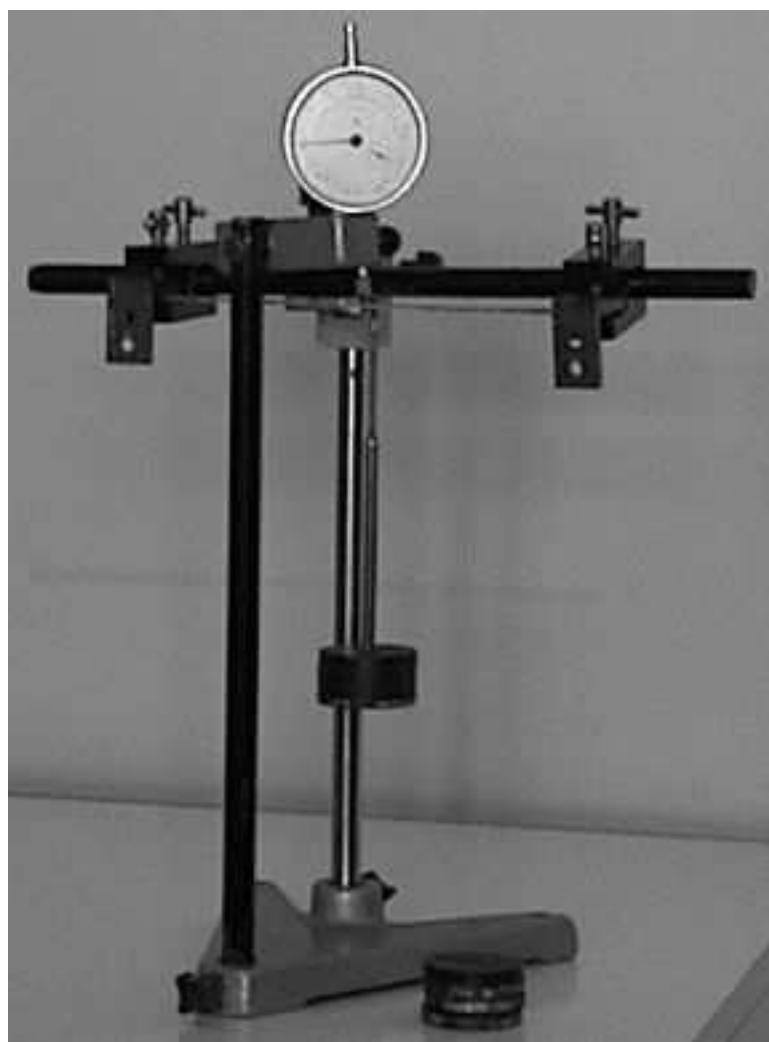
- Postupkom opisanim u prethodnom poglavlju odredite Youngove module čelika, mjedi i aluminija. Provedite račun pogrešaka. Usporedite dobivene rezultate s onima iz literature. Dimenzije letvi su dane u donjoj tablici.

letva	debljina d	širina a
čelična letva	1,00 mm	10,2 mm
mjedena letva	1,55 mm	8,8 mm
aluminijска letva	2,05 mm	10,2 mm

Tablica 7.1: Dimenzije letvi.

Pitanja za razmišljanje

- Kako se mijenja sila $d\vec{F}_x$ ako se sloj sa slike 7.1 B) približi sredini?
- Zašto je u jednadžbi (7.7) predznak negativan?
- Gdje je, po izrazu (7.10), letva najviše, a gdje najmanje zakrivljena?



Slika 7.2: Mjerni uređaj za mjerjenje modula elastičnosti.

Vježba 8

Torziona njihalo

Teorijski uvod

Pojava pri kojoj se jedan kraj šipke učvrsti, a na drugi djeluje zakretnim momenom naziva se torzija. Zamislite šipku duljine L i polumjera R koja je podvrgnuta torziji. Na slici 8.1 je prikazan njen dio - cijev duljine L , polumjera r i debljine dr . Torzija šipke dovodi i do tordiranja (ili "sukanja") cijevi, što je na slici 8.1 prikazano deformacijom djelića cijevi - paralelepipeda visine L i površine osnovice $dS = dl \cdot dr$. U prethodnoj vježbi je deformacija letve dovela do stiskanja odnosno rastezanja njenog djelića. Ovdje toga nema, nego dolazi do međusobno usporednih pomaka pojedinih paralelepipedova. Takva se vrsta deformacije naziva smicanjem i shematski je prikazana na slici 8.2. Smicanje je u slučaju malih deformacija linearno i može se opisati Hookeovim zakonom

$$\epsilon = G\alpha, \quad (8.1)$$

gdje je ϵ , kao i u slučaju savijanja danog jednadžbama (7.1), tangencijalno naprezanje po jedinici površine (dF/dS), G modul smicanja koji ovisi o materijalu i α je kut smicanja. Gornja će se jednadžba upotrijebiti za opis torzije cijevi sa slike 8.1.

Kut smicanja paralelepipedova sa slike 8.1 je, za male deformacije, jednak omjeru duljine luka r i L , polumjera djelića kružnice kojeg donja osnova paralelepipedova opiše torzijom:

$$\alpha = \frac{r\phi}{L}. \quad (8.2)$$

Uvrštavanjem gornjeg izraza u jednadžbu (8.1), dobije se:

$$dF = G\alpha \cdot dS = \frac{G\phi}{L} r \cdot dr \cdot dl. \quad (8.3)$$

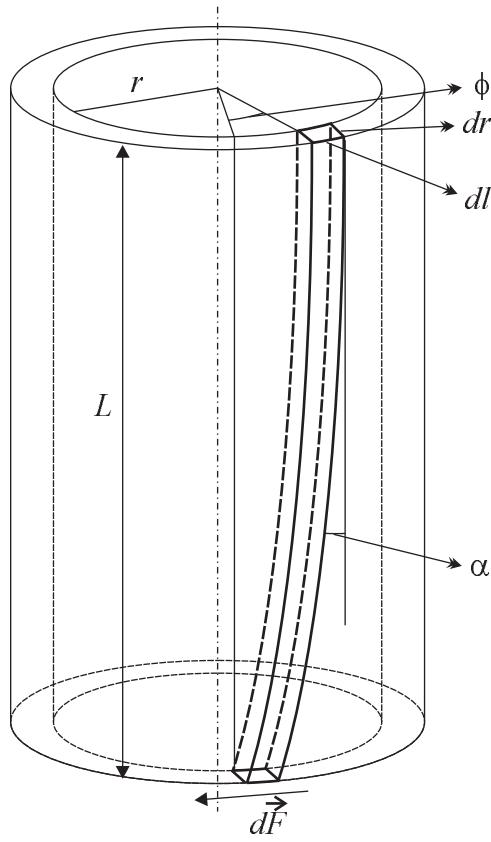
dF je element sile koji suče cijev. Moment sile M_{par} koji je doveo do zakretanja paralelepiped-a jest:

$$dM_{par} = rdF = \frac{G\phi}{L} r^2 \cdot dr \cdot dl. \quad (8.4)$$

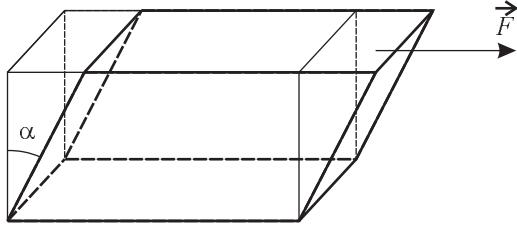
Moment sile na cijev dM_{cijev} polumjera r je jednak integralu dM_{par} po elementu duljine dl obuhvatom cijelog opsega cijevi $2\pi r$:

$$dM_{cijev} = \frac{G\phi}{L} r^2 dr \int_0^{2\pi r} dl = \frac{2\pi G\phi}{L} r^3 dr. \quad (8.5)$$

Ukupan moment sile šipke je jednak integralu momenata sila svih cijevi dM_{cijev} :



Slika 8.1: Torzija cijevi.



Slika 8.2: Smicanje.

$$M = \frac{2\pi G\phi}{L} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \frac{GR^4}{L} \phi. \quad (8.6)$$

Moment sile se može jednostavnije napisati ovako:

$$M = D_t \phi \quad (8.7)$$

gdje je D_t modul torzije definiran s

$$D_t = \frac{\pi}{2} \frac{GR^4}{L} \quad (8.8)$$

i ovisi, preko modula smicanja G , o materijalu od kojega je šipka urađena te o njenim dimenzijama.

Modul torzije se može odrediti dvjema metodama: statičkom i dinamičkom. Statička metoda podrazumijeva uspostavu stalnog momenta sile na šipku i mjerjenje kuta torzije izazvanog tim momentom. Dinamička metoda se temelji na torzionom njihalu. Ono se sastoji od šipke učvršćene na jednom i opterećene tijelom nekoga momenta tromosti I na drugom kraju. Sukanjem (tordiranjem) šipke te njenim otpuštanjem, sustav šipka - tijelo počne titrati. Parametar koji opisuje titranje sustava jest kut torzije žice ϕ . Moment sile M je jednak derivaciji zakretnog impulsa L po vremenu:

$$M = \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (8.9)$$

Jednadžbe (8.7) i (8.9) daju jednadžbu gibanja torzionog njihala:

$$I \frac{d^2\phi}{dt^2} + d_t \phi = 0. \quad (8.10)$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe drugoga reda je oscilatorno s periodom

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D_t}} \quad (8.11)$$

Mjerni uređaj i postupak mjerjenja

Eksperimentalni je uređaj prikazan na slici 8.3. Sastoji se od dinamometara, zaporne ure, dvaju utega mase po 320 g, kružne skale s pokazivačem te letvom s hvatištima te podjelom s naizmjeničnim oznakama žute i plave boje koje se izmjenjuju svaka 2 cm. Za središte letve se pričvrsti jedan kraj šipke čiju torziju proučavamo, dok se njen drugi kraj pričvrsti za držač na drugom kraju postolja. Pri montiranju pazite da šipke ne budu prenapregnute ili labave.

Određivanje modula torzije statičkom metodom

Zakačite dinamometar za hvatište na letvi koje je najviše udaljeno od njenog središta. Zakrećite letvu držeći dinamometar za njegovo hvatište i pri tome pazeći da bude okomit na letvu. Vodite računa o tome da dinamometar pokazuje iznos sile, a za račun temeljen na jednadžbi (8.7) trebate poznavati moment sile!

Određivanje modula torzije dinamičkom metodom

Ova se metoda temelji na mjerenu perioda titranja torzionog njihala, čiji je period dan jednadžbom (8.11). I je moment tromosti sustava kojega sačinjavaju šipka, letva s hvatištima te utezi pričvršćeni na letvu:

$$I = I_{letve} + I_{šipke} + I_{utega} = I_0 + I_{utega}, \quad (8.12)$$

gdje je $I_0 = I_{letve} + I_{šipke}$. Os vrtnje utega ne prolazi kroz os simetrije utega, te je moment tromosti utega I_{utega} , po Steinerovom poučku, jednak

$$I_{utega} = 2 \left(I_{ut}^{cm} + md^2 \right), \quad (8.13)$$

gdje je I_{ut}^{cm} moment tromosti jednoga utega kada se njegova os simetrije poklapa s osi vrtnje, m je masa jednog utega, a d njegova udaljenost od osi letve. Uvrštavanjem jednadžbi (8.12) i (8.13) u jednadžbu (8.11), dobije se sljedeći izraz za period torzionog njihala

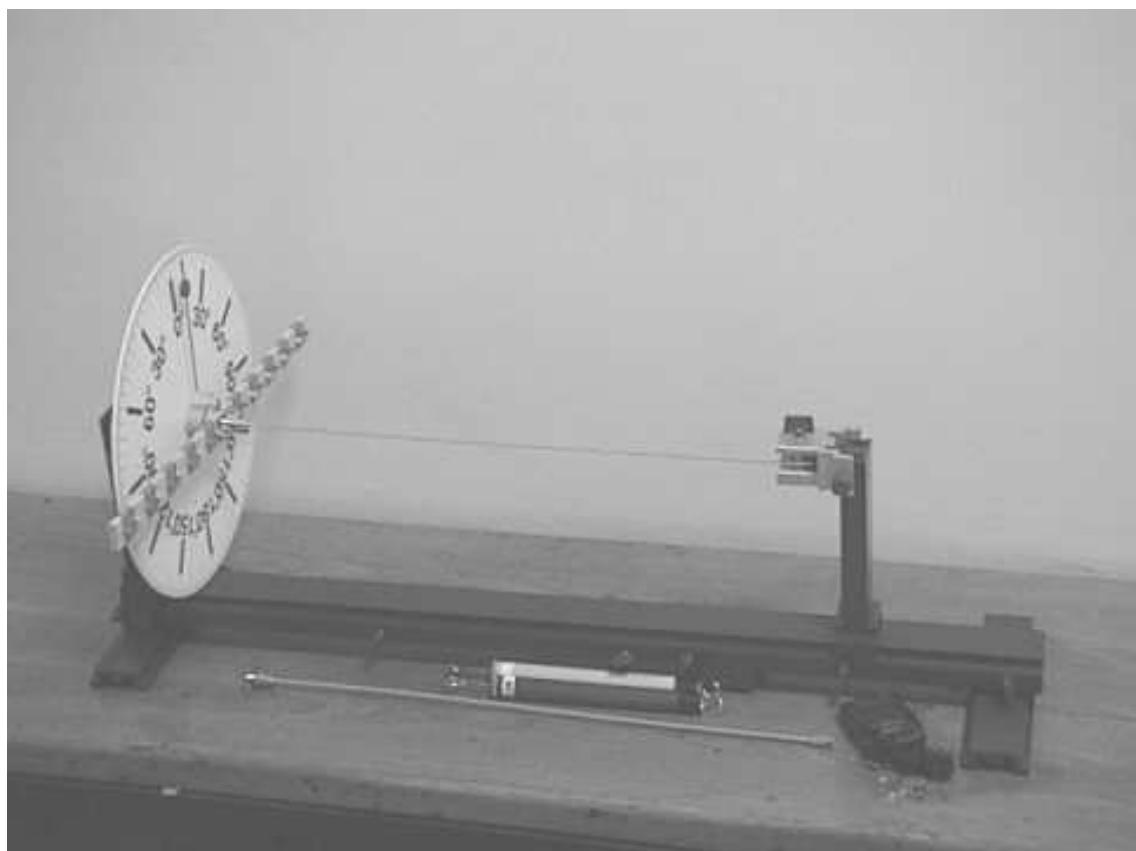
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + 2I_{ut}^{cm} + 2md^2}{D_t}} \quad (8.14)$$

Zadaci

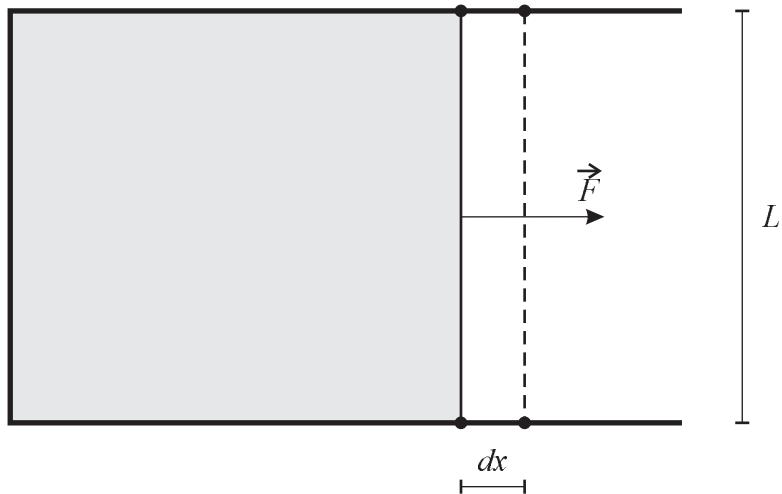
1. Statičkom metodom odredite modul torzije D_t bakrene i aluminijske šipke. Pri mjerenu s bakrenom šipkom koristite dinamometar koji podnosi najveće opterećenje od 2,5 N. Kut torzije šipke mijenjajte od 5° do 45° s koracima po 5° . U slučaju aluminijske šipke, služite se dinamometrom s najvećim opterećenjem od 1 N, a kut torzije mijenjajte od 10° do 60° s koracima po 10° . Modul torzije D_t odredite metodom najmanjih kvadrata pomoću jednadžbe (8.7). Iz izračunate vrijednosti D_t pomoću jednadžbe (8.8) izračunajte modul smicanja G bakra i aluminijske šipke. Provedite račun pogrešaka. Dimenzije šipki te vrijednosti za G iz literature su dani u tablici.
2. Dinamičkom metodom odredite modul torzije bakrenu šipku postupkom opisanim u prethodnom poglavlju. Utege simetrično pomičite duž letve. Dobivene rezultate prikažite grafom $T^2 - d^2$ i metodom najmanjih kvadrata, pomoću jednadžbe (8.14) odredite modul torzije bakrene šipke D_t . Na temelju D_t pomoću jednadžbe (8.8) izračunajte modul smicanja G bakra. Usporedite ga s vrijednošću dobivenom u prethodnom zadatku. Provedite račun pogrešaka.

materijal	L	$2R$	$G_{lit.}$
Cu	50 cm	3 mm	$38 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \text{ rad}$
Al	50 cm	2 mm	$24 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \text{ rad}$

Tablica 8.1: Dimenzije šipki i modul smicanja bakra i aluminijske šipke.



Slika 8.3: Uredaj za proučavanje torzije.



Slika 9.1: Uz izvod jednadžbe (9.2).

Vježba 9

Površinska napetost tekućine

Teorijski uvod

Na molekule u tekućini djeluju međumolekularne sile. Statistički gledano, sve se sile na jednu promatranu molekulu ponište. Međutim, molekule koje se nalaze na površini tekućine nisu okružene molekulama sa svih strana te niti ukupna sila nije nula nego je usmjerenka unutrašnjosti tekućine. Zato tekućina nastoji poprimiti oblik koji će imati najmanju površinu. Za povećanje površine tekućine za dS je potrebno uložiti rad dW , a omjer tih dvaju veličina, γ , se naziva specifičnom površinskom energijom ili površinskom natetošću

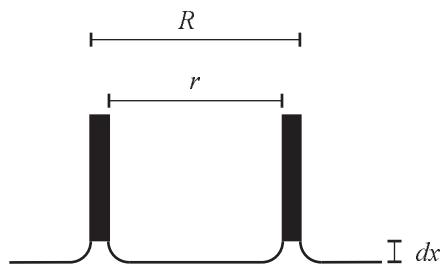
$$\gamma = \frac{dW}{dS}. \quad (9.1)$$

Napetost površine se može definirati i preko sile koju je potrebno uložiti na povećanje površine tekućine. Na slici 9.1 je shematski prikazana opna od sapunice razapeta preko žičanog okvira kojemu je jedan kraj pokretan. Rad kojega uloži sila F za pomak pokretnog dijela okvira je $dW = Fdx$, dok je povećanje površine sapunice jednako Ldx . Napetost površine γ je, prema izrazu (9.1), jednaka

$$\gamma = \frac{F}{L}. \quad (9.2)$$

Mjerni uređaj i postupak mjerjenja

Na slici 9.3 je prikazan uređaj za mjerjenje ovisnosti napetosti površine tekućine o temperaturi. Sastoji se od elastične opruge na čijem je dnu obješena zdjelica na koju se objesi prsten unutarnjeg polumjera r i vanjskoga R , skale s milimetarskom podjelom i dva označivača te vodene kupelji s termostatom. Prsten se uroni u posudu s vodom čiju napetost želimo izmjeriti, pazeći da samo svojom donjom plohom dodiruje površinu vode. Prije toga uronite čitav prsten u vodu tako da sve plohe prstena budu vlažne. Obilježavačem na milimetarskoj skali označite početni položaj opruge (L_1). Zatim držać opruge polako podižite do trenutka otkidanja prstena od površine vode. Zabilježite taj položaj opruge (L_2). Sila koju je bilo potrebno uložiti u otkidanje prstena od površine tekućine je jednaka $F = k(L_2 - L_1)$, gdje je k konstanta elastičnosti opruge. Na slici 9.2 je prikazan presjek površine tekućine u trenutku otkidanja prstena. Površina tekućine je povećana za iznos $S_r + S_R$, gdje je S_r povećanje površine uz unutarnji, a S_R uz vanjski rub prstena. Površine S_r i S_R



Slika 9.2: Prsten Jollyeve vase u trenutku otkidanja od površine tekućine.

su jednake umnošku opsega i visine podignute površine tekućine dx , te je napetost površine γ , po izrazu (9.2) jednaka

$$\gamma = \frac{k(L_2 - L_1)}{2\pi(r + R)}. \quad (9.3)$$

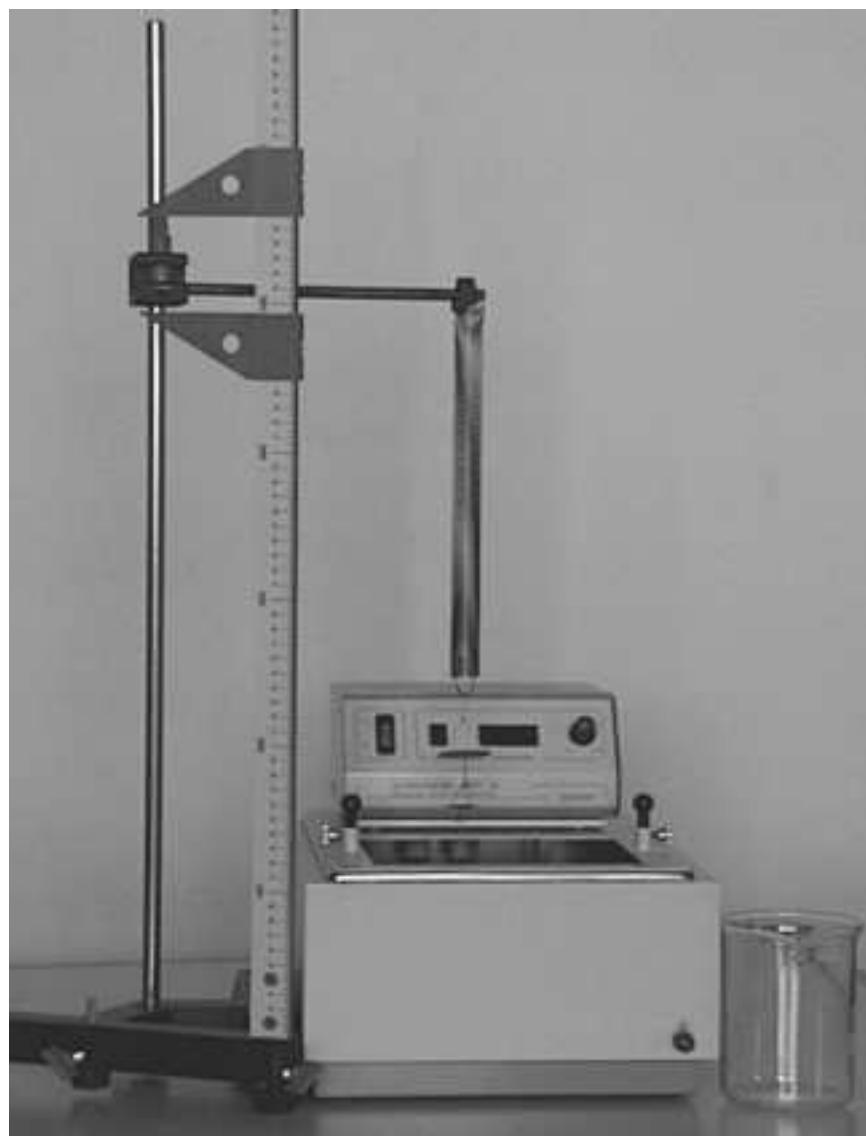
Posuda s vodom u koju je uronjen prsten se uroni u vodenu kupelj. Vodena kupelj s termostatom služi za regulaciju temperature vode. Termostat na sebi ima dugme za njegovo uključivanje/isključivanje, dugme 'SET T(C)', potenciometar s oznakama 'min' i 'max' te zaslon od tekućih kristala. Temperatura se namješta tako da se tipka 'SET T(C)' pritisne i drži pritisnutom, a potenciometrom se namješta željena temperatura. Otpuštanjem tipke 'SET T(C)' na zaslonu je prikazana trenutna temperatura vode u kupelji.

Zadaci

1. Opteretite elastičnu oprugu utezima mase do 20 grama i izmjerite produženje elastične opruge. Izmjerite barem pet parova točaka (m , Δx). Iz relacije za elastičnu oprugu, $F = k\Delta x$, metodom najmanjih kvadrata izračunajte konstantu opruge k . Provedite račun pogrešaka.
2. Odredite temperaturnu promjenu napetosti površine vode u području temperature od $t = 30^\circ\text{C}$ do $t = 70^\circ\text{C}$ s koracima od po $\Delta t = 5^\circ\text{C}$. Nakon što je voda u vodenoj kupelji stabilizirana, pričekajte nekoliko minuta da se stabilizira i voda u posudi s prstenom. Nakon mjerenja izmjerite temperaturu vode u posudi priloženim termometrom. Prikažite dobivene rezultate u grafu $\gamma = f(t)$. Komentirajte dobivene rezultate.

Pitanje za razmišljanje

- Kakav oblik poprima tekućina u bestežinskom stanju? Zašto?



Slika 9.3: Uredaj za određivanje temperaturne ovisnosti površinske napetosti tekućine.

Dodatak A

Jednadžba harmoničkog oscilatora

Često se u problemima iz fizike javlja harmonički oscilator čija je jednadžba gibanja

$$F = -k(x - x_0). \quad (\text{A.1})$$

Ako, radi jednostavnost stavimo da je $x_0 = 0$, dobijemo jednadžbu $F = -kx$. Uvrstivši drugi Newtonov zakon u nerelativističkom obliku ($F = m \cdot a = m \cdot d^2x/dt^2$) u gornju jednadžbu, dobije se sljedeći izraz

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (\text{A.2})$$

Smjenom $\omega_0^2 = k/m$, gornja jednadžba postane

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (\text{A.3})$$

To je linearne diferencijalna jednadžba drugoga reda i kao općenito se rješenje nameće ono oblika $x(t) = Ae^{\lambda t}$. Uvrštavanjem općenitog rješenja u jednadžbu (A.4) dobije se

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 A e^{\lambda t} = 0, \quad (\text{A.4})$$

što daje takozvanu karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (\text{A.5})$$

Njena su rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ te je općenito rješenje diferencijalne jednadžbe (A.5) dano kao linearne kombinacije rješenja s $\lambda_1 = i\omega_0$ i $\lambda_2 = -i\omega_0$:

$$x(t) = a e^{i\omega_0 t} + b e^{-i\omega_0 t} \quad (\text{A.6})$$

Imajući na umu definicije funkcija $\sin(x)$ i $\cos(x)$, gornji se izraz može napisati i ovako

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0), \quad (\text{A.7})$$

gdje je x_0 amplituda, ω_0 frekvencija, a ϕ_0 početna faza harmoničkog oscilatora. Period harmoničkog oscilatora je definiran s

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (\text{A.8})$$

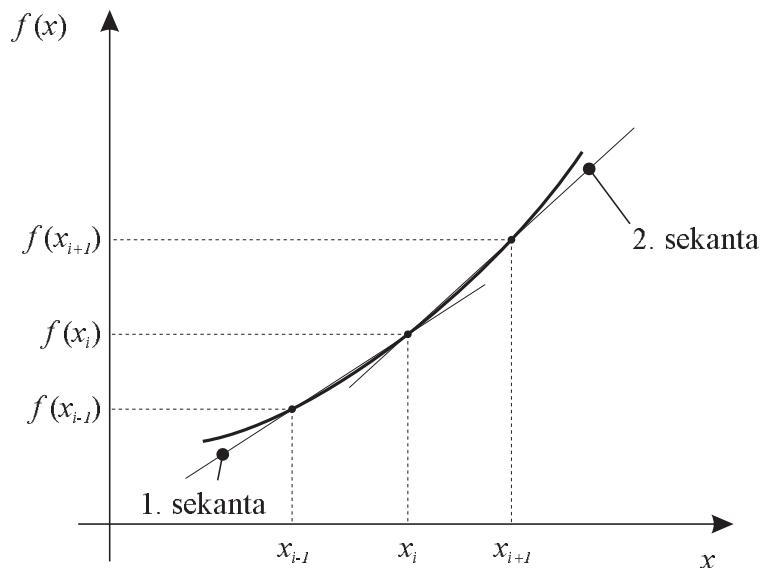
Dodatak B

Numeričko deriviranje

Numeričko je deriviranje postupak kojim se derivacija funkcije računa pomoću njenih vrijednosti.

Na slici B.1 je prikazana neka funkcija $f(x)$. Zamislimo da u točki x_i želimo numerički izračunati njenu derivaciju. Najjednostavije je rješenje povući sekantu kroz par točaka $(x_i, f(x_i))$ i $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Tangens kuta nagiba sekante prema osi x daje vrijednost derivacije funkcije $f(x)$ u $x = x_i$:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}. \quad (\text{B.1})$$



Slika B.1: Uz izvod formule za numeričku derivaciju.

Međutim, privuče li se sekanta kroz par točaka $(x_i, f(x_i))$ i $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ derivacija $f'(x_i)$ nije jednaka onoj danoj jednadžbom (B.1):

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}. \quad (\text{B.2})$$

Različite vrijednosti derivacija danih jednadžbama (B.1) i (B.2) su prikazana dvama sekantama na slici B.1. Da bi se izbjegla neodređenost prve derivacije definirane jednadžbama (B.1) odn. (B.2), za prvu derivaciju krivulje u točki $(x_i, f(x_i))$ se definira kao tangens kuta sekante povučene kroz točke $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ i $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})}. \quad (\text{B.3})$$

Jednadžba (B.3) se koristi pri numeričkom računanju prve derivacije funkcije.

Kazalo

- anomalija vode, 12
centar mase, 30
eliptički integral prve vrste, 27
energija vrtnje, 17
gustoća, 11
harmonički oscilator, 49
Hookeov zakon, 34, 35, 39
kapljevina, 11
karakteristična jednadžba, 49
kinetička energija, 17, 26
koeficijent ekspanzije, 12
konstanta elastičnosti opruge, 46
kutna brzina, 18, 21
kutno ubrzanje, 22, 30

Maxwelllov disk, 17, 18
mikrometarskim vijak, 7
moment sile, 8, 30, 35, 40, 41
moment tromosti, 18, 21, 30

nonius, 7

period torzionog njihala, 42
Poissonov omjer, 34
pomična mjerka, 6
potencijalna energija, 17
reducirana duljina njihala, 31
sila uzgona, 14
smicanje, 39
modul, 39
Steinerov poučak, 31, 42
torzija, 39
modul, 41
vaga, 8
vernier, 7
vodena kupelj, 15
vodikova veza, 11
Youngov modul, 34
zatvoreni sustav, 17

Literatura

- [1] Phywe Laboratory Experiments, CD-ROM, 2005.
- [2] M. Požek i A. Dulčić, Fizički praktikum I i II, Sunnypress, Zagreb (1999)
- [3] http://www.colorado.edu/physics/phys1140/phys1140_sp05/Experiments/M3Fall04.pdf
- [4] http://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_differentiation